

INTEGRALS INDEFINIDES

1. Integració quasi-immediata :

$$\begin{aligned}
 &1) \int (a + bx^3)^2 dx \quad 2) \int \sqrt{2ax} dx \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} dx \quad 4) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx \quad 5) \int \frac{(2x-1)^2}{\sqrt{x}} dx \quad 6) \int \operatorname{tg}^2 x dx \\
 &7) \int 3^x \cdot e^x dx \quad 8) \int \frac{x}{\sqrt{a^4 - x^4}} dx \quad 9) \int \frac{x^5}{\sqrt{x^6 - 1}} dx \quad 10) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx \quad 11) \int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + 4x^2} dx \\
 &12) \int a \cdot e^{-\ln x} dx \quad 13) \int \frac{a^{2x} - 1}{\sqrt{a^x}} dx \quad 14) \int x^2 \cdot 7^{x^3} dx \quad 15) \int 5^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad 16) \int \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-bx}} dx \quad 17) \int \sin(a + bx) dx \\
 &18) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad 19) \int \sin^2 x dx \quad 20) \int \cot g 3x dx \quad 21) \int x \sqrt[5]{5 - x^2} dx \quad 22) \int \frac{dx}{x \ln x} \quad 23) \int \operatorname{tg}(\sqrt{x-1}) dx \\
 &24) \int e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cos x dx \quad 25) \int \cos^3 x dx
 \end{aligned}$$

Solucions:

$$\begin{aligned}
 &1) a^2 x + \frac{abx^4}{2} + \frac{b^2 x^7}{7} + k \quad 2) \frac{2x}{3} \sqrt{2ax} + k \quad 3) \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{x^{n-1}} + k \quad 4) \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + x + k \quad 5) \frac{2}{15} \sqrt{x} (12x^2 - 20x + 15) + k \\
 &6) \operatorname{tg} x - x + k \quad 7) \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + k \quad 8) \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{a^2} + k \quad 9) \frac{1}{3} \sqrt{x^6 - 1} + k \quad 10) \frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3} + k \\
 &11) \frac{1}{8} \ln|1 + 4x^2| - \frac{1}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3} + k \quad 12) a \ln|x| + k \quad 13) \frac{2}{\ln a} \left( a^{\frac{2}{3}x} + a^{-\frac{x}{2}} \right) + k \quad 14) \frac{1}{3 \ln 7} 7^{x^3} + k \quad 15) \frac{2 \cdot 5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + k \\
 &16) \frac{1}{b} \ln|1 - e^{-bx}| + k \quad 17) -\frac{1}{b} \cos(a + bx) + k \quad 18) \sin(\ln x) + k \quad 19) \frac{x}{2} - \frac{x}{4} \sin 2x + k \quad 20) \frac{1}{3} \ln|\cos 3x| + k \\
 &21) -\frac{5}{3} \sqrt[5]{(5 - x^2)^6} + k \quad 22) -\frac{1}{\ln x} + k \quad 23) -2 \ln|\cos \sqrt{x-1}| + k \quad 24) e^{\sin^2 x} + k \quad 25) \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + k
 \end{aligned}$$

2. Integració per parts:

$$\begin{aligned}
 &1) \int \operatorname{arctg} 3x dx \quad 2) \int x^2 \cdot e^{ax} dx \quad 3) \int e^x \sin x dx \quad 4) \int \cos(\ln x) dx \quad 5) \int \frac{6 \sin x + x^3 \cos x}{x^4} dx \quad 6) \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx \\
 &7) \int (16x^3 + 9x^2 - 4x + 2) dx \quad 8) \int 3^x \cos 5x dx \quad 9) \int \ln^2 x dx \quad 10) \int x \sec^2 x dx
 \end{aligned}$$

Solucions:

$$\begin{aligned}
 &1) x \operatorname{arctg} 3x - \frac{\ln|1 + 9x^2|}{6} + k \quad 2) \frac{e^{ax}}{a} \left( x^2 - \frac{2}{a} x + \frac{2}{a^2} \right) + k \quad 3) \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + k \quad 4) \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + k \\
 &5) -\frac{2 \sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} + k \quad 6) \frac{x^2}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} - x + \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-1) + k \quad 7) (4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x) \ln x - \\
 &-(x^4 + x^3 - x^2 + 2x) + k \quad 8) \frac{3^x}{25 + \ln^2 3} (5 \sin 5x + \ln 3 \cos 5x) + k \quad 9) x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + k \quad 10) x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + k
 \end{aligned}$$

3. Integració per canvi de variable:

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx \quad 2) \int x \sqrt{x+1} dx \quad 3) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad 4) \int \frac{3x+5}{\sqrt{5x+6}} dx \quad 5) \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx \quad 6) \int \sec x dx \\
 &7) \int \sqrt{4-x^2} dx \quad 8) \int \frac{dx}{e^x + 1} dx [Ind : x = -\ln t] \quad 9) \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}} dx [Ind : x = t^6]
 \end{aligned}$$

Solucions:

$$1) 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + K \quad 2) 2(x-1)\sqrt{x-1} \frac{3x+2}{15} + K \quad 3) 2\sqrt{x+1} \frac{x-2}{3} + k \quad 4) \frac{2}{25} \sqrt{5x+6}(5x+13) + k$$

$$5) \frac{2\sqrt{x-1}}{35} (5x^3 + 6x^2 + 8x + 16) + k \quad 6) \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} + k \quad 7) 2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + k \quad 8) -\ln|1+e^{-x}| + k$$

$$9) 6 \left( \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + k \right)$$

4. Integrals racionals:

$$1) \int \frac{x+1}{x^2} dx \quad 2) \int \frac{3x+5}{x^2+2x-3} dx \quad 3) \int \frac{x}{x^2-7x+12} dx \quad 4) \int \frac{x^2}{x^2-7x+12} dx \quad 5) \int \frac{1}{x^3+3x^2+3x+1} dx$$

$$6) \int \frac{x+1}{x^3+2x^2-4x-8} dx \quad 7) \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx \quad 8) \int \frac{x^2-1}{x^2+9} dx \quad 9) \int \frac{2x-1}{x^2+3x+5} dx \quad 10) \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$$

$$11) \int \frac{x-2}{x^3-x^2+x-1} dx \quad 12) \int \frac{2x+5}{4x^2+9} dx$$

Solucions:

$$1) \ln|x| - \frac{1}{x} + K \quad 2) 2 \ln|x-1| + \ln|x+3| + k \quad 3) 4 \ln|x-4| - 3 \ln|x-3| + k \quad 4) x + 16 \ln|x-4| - 9 \ln|x-3| + k$$

$$5) -\frac{1}{2}(x+1)^{-2} + k \quad 6) \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \frac{1}{4(x+2)} + k \quad 7) -\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + k \quad 8) x - \frac{10}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + k$$

$$9) \ln|x^2+3x+5| - \frac{8}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + k \quad 10) -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln|1-x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + k$$

$$11) -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + k \quad 12) \frac{1}{4} \ln|4x^2+9| + \frac{5}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + k$$

5. Integrals Trigonométriques:

$$1) \int \sin 3x \cos 5x dx \quad 2) \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx \quad 3) \int \operatorname{tg}^4 x dx \quad 4) \int \sin^2 x dx \quad 5) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad 6) \int \sin^3 x dx$$

$$7) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx \quad 8) \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$$

Solucions:

$$1) -\frac{1}{18} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + K \quad 2) \frac{5}{12} \sin \frac{5x}{6} + \frac{1}{12} \sin \frac{x}{6} + k \quad 3) \frac{1}{9} \operatorname{tg}^3 3x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + x + k \quad 4) \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + k$$

$$5) \operatorname{tg} x - \cot gx + K \quad 6) -\frac{1}{7} \cos 7x + \frac{\cos^3 7x}{21} + K \quad 7) -\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2} - 2 \ln|\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + K$$

6. Integra :

$$\begin{aligned}
& 1) \int x(2x+5)^{10} dx \quad 2) \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx \quad 3) \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} \quad 4) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} \quad 5) \int \frac{\ln 2x}{(\ln 4x)x} dx \quad 6) \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
& 7) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx \quad 8) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx \quad 9) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \quad 10) \int \sqrt{1-x^2} dx \quad 11) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 12) \int \frac{x^3+1}{x^2-5x+4} dx \\
& 13) \int \frac{dx}{2^x+3} \quad 14) \int (\cos ax + \sin ax)^2 dx \quad 15) \int \cos^2 x dx \quad 16) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} \quad 17) \int \sec^3 x dx \\
& 18) \int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx \quad 19) \int \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) dx \quad 20) \int \frac{x}{e^x} dx \quad 21) \int \frac{a}{a-x} dx \quad 22) \int \frac{2x+3}{2x+1} dx \quad 23) \int \frac{x^2+1}{x-1} dx \\
& 24) \int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx \quad 25) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad 26) \int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x} dx \quad 27) \int \frac{dx}{3x^2+5} \quad 28) \int \frac{x^2}{x^2+2} dx \\
& 29) \int \frac{x \operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 30) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx
\end{aligned}$$

Solucions:

$$\begin{aligned}
& 1) \frac{x(2x+5)^{11}}{22} - \frac{(2x+5)^{12}}{528} + K \quad 2) \frac{2x\sqrt{x}}{3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}+1| + k \quad 3) \ln \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} + K \quad 4) 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x-1}) - \\
& 5) \ln 2x - \ln 2 \cdot \ln|\ln 4x| + k \quad 6) \frac{(\arcsin x)^3}{3} + K \quad 7) \frac{2\sqrt{e^x+1}(e^x-2)}{3} + K \quad 8) 2\sqrt{\cos x} \left( \frac{\cos^2 x}{5} - 1 \right) + k \\
& 9) \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + K \quad 10) \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + k \quad 11) -\frac{\arcsin(\sqrt{1-x^2}) + x\sqrt{1-x^2}}{2} + k \\
& 12) \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{65\ln(x-4)}{3} - \frac{2\ln(x-1)}{3} + K \quad 13) \frac{1}{3\ln 2} \cdot \ln \frac{2^x}{2^x+3} + K \quad 14) x - \frac{\cos 2ax}{2a} + K \quad 15) \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + K \\
& 16) \ln|\operatorname{tg} x| + K \quad 17) \frac{\sec x \cdot \operatorname{tg} x}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} + K \quad 18) 2\sqrt{x+1}(\ln(x+1)-2) + K \quad 19) x \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) \\
& 20) -\frac{x+1}{e^x} + K \quad 21) -a \ln|a-x| + K \quad 22) x + \ln|2x+1| + K \quad 23) \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|2x-1| + K \\
& 24) \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3\ln|x-1| + k \quad 25) \sqrt{x^2+1} + k \quad 26) 2\sqrt{x} + \frac{\ln^2 x}{2} + K \quad 27) \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}}{5} x + K \\
& 28) x - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{2} + K \quad 29) -\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} + x + K \quad 30) \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + K
\end{aligned}$$

7. Trobau una funció tal que la recta tangent té un pendent de  $m = \frac{2x}{1-3x^2}$  per cada valor d' $x$  i la seva

gràfica passa per  $A(0, 5)$ .  $\left[ F(x) = -\frac{1}{3} \ln|1-3x^2| + 5 \right]$

7. Trobau la primitiva de  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$  que passi pel punt  $(0, 2)$ .  $[F(x) = x - \operatorname{arctg} x + 2]$

9. D'una funció sabem que  $f''(x) = 6x + 6$ ,  $f'(-2) = 20$ ,  $f(0) = 1$ . Demostrea que  $f(x)$  només té una solució real.

10. Busca una funció  $f(x)$  que verifiqui  $x^2 f'(x) + 5x - 3 = 1$  per a  $x \neq 0$ .  $[f(x) = -\frac{4}{x} - 5\ln|x| + k]$