CONTINUÏTAT I DERIVABILITAT

1. Donada la funció $f(x) = x^5 + x + 1$ trobau un sencer n tal que f(x)=0, per algun x comprès entre n i n+1.[n=-1].

2. Estudia la continuïtat de la funció f(x)= x- E[x], on E[x] és la part sencera de x.[És contínua a R-Z]

3. Estudia la continuïtat i la derivabilitat de les funcions :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x < o \\ 1 - x^2 & si \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x & si \quad x \leq 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & si \quad 1 \leq x \end{cases}$$

4. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x}$ $si \quad x \neq 0$ .Quin valor s'ha d'assignar a f(o) per a què sigui contínua a x=0 ?[f(0)=1/3].

5. Demostrar que per tot "m", l'equació $2x^5+x+m=0$ mai té dues solucions reals.

6. Donades les funcions $f(x)=x^2+ax+b$ i $g(x)=x^3+c$ determina a,b,c de manera que les seves gràfiques passin pel punt (1,3) i ambdues tenguin la mateixa recta tangent en aquest punt.[a=b=1 c=2].

7. Comprovau que la corba $y=x^5-5x+1$ té exactement tres punts d'intersecció amb l'eix OX.

8. Demostrau que l'equació $3x^3-x^2+6x-2=0$ té únicament una arrel real. Fitau-la amb un error menor que una dècima.[0.3< c < 0.4].

9. Demostrau que l'equació $x^{90} - \dfrac{1}{2 + \cos x} = 7$ té al menys una solució real.

10. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$.És contínua a x=0 ?. És derivable a x=0 ?.És continua la funció derivada en x=0 ?.Raonau les respostes.[sí en els tres casos].

11. Demostrau que la funció y = e^x-x-3 té un cero en el eix real positiu. Investigau si és l'únic.

12. Estudiau la continuïtat de les funcions :

$a) f(x) = \ln(sen\ x)$ **[contínua en** $\mathbf{E = \{(2k\pi,\ \pi + 2k\pi),\ \forall k \in Z\}}$

b) $\mathbf{g(x) = sen(\cos x)}$ **[contínua en** $\mathbf{\Re}$**].**

c) $\mathbf{h(x) = \ln|sen\ x|}$ **[contínua en** $\mathbf{\Re - \{k\pi,\ \forall k \in Z\}}$**.**

CONTINUÏTAT I DERIVABILITAT

13. Calculau :

$$a)\ lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}[1/2]\quad b)\ lim_{x\to 0^+}\frac{a^{\frac{1}{x}}}{\ln x}[-\infty]\quad c)\ lim_{x\to 1}\frac{sin^2(x-1)}{x^3-x}[0]$$

$$d)\ lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sinx}-\frac{1}{x}\right)[0]\quad e)\ lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}[0]\quad f)\ lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}[no\ en\ te]$$

$$g)\ lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)[1/2]\quad h)\ lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{\operatorname{tg}x-sinx}[1/3]\quad i)\ lim_{x\to 2}(x-2)^{sin(x-2)}[1]$$

14. Demostrau que si 0 < a < b, es verifica que :

$$1-\frac{a}{b} < \ln\frac{a}{b} < \frac{b}{a}-1$$

*) Indicació : Aplicau el teorema dels increments finits a f(x)= ln x

15. Siguin f(X) i g(x) dues funcions en R i tals que verifiquen :

a) f' (x)>g' (x) $\forall x\in R$ b) f(a)=g(a)

Demostrau que : 1. f(x)>g(x) $\forall x>a$ 2. f(x)<g(x) $\forall x<a$

*) Indicació : Aplicau el teorema del valor mig a [x,a] i [a,x].

16. Demostrau que si $f'(x)\le m, \forall x\in(a,b)$ aleshores $f(b)\le f(a)+m(b-a)$

17. Escriviu l'equació de la recta tangent a la corba

$f(x)=e^{-x}+\ln(x+1)-2$ a $x=0$ [y+1=0].

18. Suposem que f(x) és contínua i derivable a (0,1), que f(x) està a (0,1) $\forall x$ i que $f'(x)\ne 1\,\forall x\in(0,1)$. Demostrau que existeix solament un $\alpha\in(0,1)$ tal que $f(\alpha)=\alpha$.

19. Escriviu l'equació de la recta que passa per A(1,7) i és paral.lela a la recta tangent a $y=x^2-x+5$ en (1,5).[x-y+6=0].

20. Demostrau que si $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+...+\frac{a_n}{n+1}=0$, aleshores $a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n=0$ per algun x $\in$ (0,1).