FUNCIONS. LÍMITS DE FUNCIONS

1. Donades les funcions:

$$f(x)=3x^2+5 \qquad g(x)=\frac{x^2+5}{x^2-1} \qquad h(x)=\sqrt{x+4} \qquad j(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-9}}$$

Es demana : a) Domini de totes.
b) Inversa de totes. Comprovació.
c) f composada amb g, h composada amb f, j composada amb g.
d) Recorregut de totes.

Solució:

$D(f(x))=R.$ $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x-5}{3}}$ $\mathrm{Re}c(f(x))=[-5,\infty).$ $D(g(x))=R-\{\pm 1\}$ $g^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x+}{x-}}$

$\mathrm{Re}c(g(x))=(-\infty,-5]\cup(1,\infty)$ $D(h(x))=[-4,\infty)$ $h^{-1}(x)=\sqrt{x^2-4}$ $\mathrm{Re}c(h(x))=[2,\infty)$

$D(j(x))=(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$ $j^{-1}(x)=\sqrt{\frac{1+9x^2}{x^2-1}}$ $\mathrm{Re}c(j(x))=(1,\infty)$ $(g\circ f)(x)=\frac{9x^4+30x^2}{9x^2+30x^2}$

$(f\circ h)(x)=3x+17$ $(g\circ j)(x)=\frac{3x^2-22}{5}$

2. Trobau la funció inversa de :

$a)\ f(x)=\sqrt{e^{5x}+1}$ $b)\ g(x)=\ln(1-3\ sin2x)$ $c)\ h(x)=arc\ \mathrm{tg}(e^x-1)$

Solució: $f^{-1}(x)=\frac{1}{5}\ln(x^2-1)$ $g^{-1}(x)=\frac{1}{2}arc\ sin\left(\frac{1-e^x}{3}\right)$ $h(x)=\ln(1+\mathrm{tg}\,x)$

3. Calculau els següents límits:

$a) lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+3}{5x^2-1}\left[\frac{8}{5}\right]$ $b) lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+6}{5x^4-1}[0]$ $c) lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3}{-2x+1}[-\infty]$ $d) lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x+2}+3x}{5x+\sqrt{9x^2+1}}\left[\frac{3}{8}\right]$

$e) lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x^2+3}}{2x+\sqrt{x^2-1}}\left[-\frac{1}{3}\right]$ $f) lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x-1}-2x\right)\left[\frac{3}{2}\right]$ $g) lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+2}-\sqrt{x^2-4}\right.$

$h) lim_{x\to 2}\frac{3x^2+5x-1}{4x+7}[7]$ $i) lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{3x-6}\left[\frac{7}{3}\right]$ $j) lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^{4x}[0]$ $k) lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{x+7}\right)^{\frac{x+1}{2x-1}}[$

$l) lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}[0]$ $m) lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{2x+2}[1]$ $n) lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+1}{x+1}-\frac{3x}{2}\right)[-\infty]$

4. Estudiau la discontinuïtat de les següents funcions:

a) $f(x)=\begin{cases} x+3 & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad 1\le x<3 \\ x^2+4 & si \quad x>3 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x=2 \text{ salt } 2 \\ \text{x}=3 \text{ salt } 11 \end{bmatrix}$ b) $g(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$ $[x=2 \text{ salt } \infty]$

c) $h(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-1}\begin{bmatrix} x=1 \text{ salt } \infty \\ \text{x}=\text{-}1 \text{ evitable} \end{bmatrix}$ d) $j(x)=\begin{cases} |x| & si \quad x<-1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad -1<x<1 \\ x^2 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x=-1 \text{ salt } 2 \\ \text{x}=0 \text{ salt } \infty \end{bmatrix}$

5. Trobau a i b perquè la funció $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+1 & si \quad x<-1 \\ 2x-1 & si \quad -1\le x<2 \\ bx+5 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$ sigui contínua a R.

[a=-2, b=-1].

6. Com hem de definir la funció $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{4x-4}}{3x-6}$ a x = 2 perquè sigui contínua en aquest punt.[-1/3].

7. Donada la funció $f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 2-x & si \quad 0<x<1 \\ x^2-1 & si \quad x>1 \end{cases}$ calculau:

a) Domini [D= $R-\{1\}$].
b) Recorregut[Rec $=(0,\infty)$].
c) Imatge del 2. [3].
d) Antiimatge del 8. [3]
e) Límit en x = 0. [No en té].
f) Límit en x = 2 [3].

8. Si una funció pren sempre valors positius i una altra funció pren sempre valors negatius. Poden tenir el mateix límit en un punt?. En cas afirmatiu, quin és aquest límit.

9. És possible dóna dues funcions f(x) i g(x) on el seu límit quan $x\to\infty$ sigui ∞ i tal que :

a) la suma f(x)+g(x) tingui en ∞ per límit 2.
b) la resta f(x)-g(x) tingui en ∞ per límit 2.