

2 BATXILLERAT

1. Trobau l'`area compresa entre la corba $Y=\ln x$, l'eix OX , $X=1/2$ i $X= 3/2$. [$3/2 \ln 3 - 2 \ln 2$].

2. Integreu:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} dx \left[\frac{1}{4} \ln 3 \right] \quad b) \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{5 - 4 \cos x} dx \left[\frac{\pi}{8} \right] \quad c) \int_0^1 \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \left[\frac{\pi^3}{24} \right] \quad d) \int_{-2}^2 \frac{5x + 3 \sin 2x}{x^2 + 3 \cos x} dx [S = 0]$$

$$e) \int e^{4x} \cos 5x dx \left[I = \frac{e^{4x}}{41} (5 \sin 5x + 4 \cos 5x) + k \right] \quad f) \int \frac{x^3 + x^2 + 6x + 1}{x^2 + 4} dx \left[I = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x^2 + 4) - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \right.$$

3. Àrea de la regió compresa entre $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ i la recta $4x + 3y = 12$. [$3\pi - 6$].

4. Demostrau que $f(x) = x^3 - 3x + 1$ té tres arrels reals.

5. calculau :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^2} [0] \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{x^2} \left[-\frac{1}{2} \right]$$

6. Estudiau la continuïtat i derivabilitat de :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

7. Trobau $\sin \alpha$, essent α l'angle que forma el pla $2x + 2y - z = 0$ amb la recta $2x = y = z$ [$4/9$].

8. Donats els punts $P(0, 0, 3)$, $Q(2, 2, -1)$ i el pla $\pi: x - y + 3z = 4$.

- a) Determinau l'equació del pla que passa per P i Q i és perpendicular a π .

b) Distància de Q a π . $\left[\frac{7}{\sqrt{11}} \right]$.

9. Equació del pla que passa per $A(1, 1, 1)$ i és perpendicular als plans $x - y - z = 95$; $y + 7z = 33$. [$6x + 7y - z - 12 = 0$].

10. Trobau un valor per al paràmetre "a" de forma que els plans : $x - y - az = 0$ $2x + az = 0$ $x - y + z = a$ quedin disposat geomètricament com una piràmide. [$\forall a \neq -1$].

2 BATXILLERAT

11. Determinau "a" perquè el sistema sigui compatible i resoldeu-ho :

$$\begin{cases} ax+3y-4z+5=0 \\ 2x-y+2z-6=0 \\ 5x-2y+z-4=0 \end{cases} \left[\begin{array}{l} a \neq -\frac{20}{3} \Rightarrow x = \frac{23}{3a+20} z = \frac{8a+61}{3a+20} \\ y = \frac{-2a+48}{3a+20} \end{array} \right]$$

12. Trobau "a" perquè el sistema :

$$\begin{cases} 2x-y=2 \\ ax-2y=1 \\ 2x+ay=a \\ x+5y=a \end{cases} \text{ tengui solucio. Trobau dita solucio. (a = 1; x = 1, y = 0).}$$

13. Integra :

$$a) \int \frac{x+1}{\sqrt{2x+5}} dx \left[I = \frac{1}{3} (\sqrt{2x+5})(x-2) \right] \quad b) \int \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} dx \left[I = x + \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^2} + k \right]$$

14. Discutir el següent sistema segons els valors de "a" i "b".

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases} \left[\begin{array}{l} a=1 \begin{cases} b=1 \text{ comp. det.} \\ b \neq 1 \text{ incomp.} \end{cases} \\ a=-2 \begin{cases} b=-2 \text{ comp. ind.} \\ b \neq -2 \text{ incomp.} \end{cases} \\ a \neq 1, -2 \begin{cases} b=0 \text{ incomp.} \\ b \neq 0 \text{ comp det.} \end{cases} \end{array} \right]$$

15. Discutiu i resoleu el sistema quan sigui compatible:

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases} \left[\begin{array}{l} a \neq 1, -2 \Rightarrow \text{sis. compt. det} \quad x=y=z=\frac{1}{a+2} \\ a=1 \Rightarrow \text{sis comp in det} \quad x=1-y-z, y=y, z=z \\ a=-2 \Rightarrow \text{sis incomp.} \end{array} \right]$$

16. Donada la funció $f(x) = \frac{x^2-x}{\sin \pi x}$ $x \in (0,1)$, definir $f(0)$ i $f(1)$ de tal manera que $f(x)$ sigui contínua a $[0,1]$. [$f(0)=f(1)=-1/\pi$].

17. Trobau les dimensions del rectangle de superfície màxima inscrit a una el.lipse de semieixos a i b. $\left[x = \frac{\sqrt{2}}{2} a, y = \frac{\sqrt{2}}{2} b \right]$

18. Trobau la distància del punt A(0,3,2) a la recta

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2} \left[\frac{\sqrt{122}}{3} \right].$$

19. Estudi i gràfica de :

$$a) y = \frac{x}{1+x^2} \quad b) y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

2 BATXILLERAT

20. Demostreu que l'equació $x^{736} - \frac{1}{2 + \cos x} - 7 = 0$ té, al menys, una solució real.

21. Trobau el simètric del punt A(0,1,2) respecte del pla $2x+y-2z=6$. [A'(4,3,-2)].

22. La funció $y = \frac{1}{x-2}$, Pot tenir un punt d'inflexió en $x=2$?

23. Estudieu la funció $y=(x-1)^5$ en un entorn de $x=1$. Representació gràfica.

24. a) Demostreu que la funció $f(x)=3x^3-x^2+3x-1$ té únicament una solució real.

b) Calculeu dita solució amb un error menor que una dècima.

25. Calculeu les derivades d'ordre 588 i 2591 de $f(x)=e^x+e^{-x}+\sin x$ [$e^x+e^{-x}+\sin x$; $e^x-e^{-x}-\cos x$].

26. Calculeu el valor de la constant c per què

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{cx} = e \quad [c=1/3].$$

27. Demostreu que :

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3x & 3y & 3z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 15(y-x)(z-x)(z-y) \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

28. Sabent que els costats d'un quadrat estan sobre les rectes :

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \quad s: \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=4 \end{cases} \quad \text{Calculeu l'àrea. [7/3].}$$

29. Un depòsit obert amb base quadrada i capacitat per 4000 litres. Quines dimensions ha de tenir a fi que la seva fabricació sigui el més econòmic possible? [20 i 10].

30. Una pàgina ha de contenir 300 cm² de lletra impresa. Els marges superior i inferior de la pàgina tenen cada un una amplària de 2,5 cm. Els marges laterals tenen 2 cm. Quines han de ser les dimensions de la pàgina de manera que la quantitat de paper a utilitzar sigui mínima? [20 i 25].

31. Demostreu que l'equació $5x + \cos x = 8$ només té una solució real.

32. Sigui $F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} dt$. Trobau el valor de $F'(0)$.

2 BATXILLERAT

33. Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y=x^2$ $y=x^{1/3}$ i les rectes $x=-1$ i $x=1$. [3/2].

34. Trobau el radi de la base i l'altura del cilindre de volum màxim que es pot inscriure en una esfera de 5 cm de radi.

$$\left[h = \sqrt{\frac{100}{3}} \quad r = \sqrt{\frac{100}{3}} \right].$$

35. Determina el valor de k perquè existeixi i sigui finit el límit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - \sin x}$. Calculeu el límit per aquest valor de K. [K=-2; 2].

36. Calculeu $(A^t \cdot A^{-1}) \cdot A$ on $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

37. Donades les funcions $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$ i $g(x) = \cos(\pi x)$. Es

demana : 1. Trobau $f(x)$. [(x+1)³].

2. Trobau l'àrea de la regió del pla tancada per les corbes $f(x)$ i $g(x)$. [0.77]

38. Trobau les matrius quadrades X que verifiquen $PX=XP$, essent $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

39. Digueu els punts de la hipèrbola $x^2 - 2y^2 = 1$ que estan a la menor distància del punt $(9/2, 0)$? [(3, 2) (3, -2)].

40. Determineu totes les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tal que la seva inversa sigui $2I - A$, on $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.