ACTIVITATS DE RECUPERACIÓ

DE

MATEMÀTIQUES II

NOM....

ANÀLISI

1. Donada la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, es demana :
   a) Monotonia
   b) Curvatura
   c) Gràfica

2. a) Determina el valor del paràmetre a que fa que la funció $f(x)=\frac{x+a}{x^3}$ presenti un extrem relatiu en x = 3.
   b) Per aquest valor del paràmetre a calcula intervals de creixements, decreixement i asímptotes.
   c) Feu una gràfica de la funció.

3. Es considera l'equació $x^3 + t x^2 - 2x = 1$. Empra el teorema de Bolzano per demostrar :
   a) Si $t>2$, l'equació admet qualque solució menor que 1.
   b) Si $t<2$, l'equació admet qualque solució major que 1.

4. Sigui $f(x)=\begin{cases} \cos x - 1 & si \ \ x < 0 \\ x^2 + a & si \ \ 0 \le x < 2 \\ \dfrac{b}{x-1} & si \ \ x \ge 2 \end{cases}$ .Trobau a i b perquè sigui contínua a R. Pels valors trobats, estudiau la seva derivabilitat.

5. Trobau el punt on la corba $y=\frac{x^3}{(x+1)^2}$ i la seva asímptota obliqua es tallen.

6. Donada la funció $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & -1 \le x \le 3 \\ bx+c & 3 \le x \le 5 \end{cases}$ trobau a, b, c perquè es verifiqui el teorema de Rolle a [-1, 5]. Trobau el punt on es verifica.

7. Donada la funció $f(x)=\frac{e^x}{(x+1)^2}$ es demana :
   a) Monotonia
   b) Asímptotes
   c) Gràfica

8. a) En quin punt la corba d'equació $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$ té la tangent horitzontal?.
   b) És possible que aquesta corba tengui una recta tangent paral·lela a la recta $3x - 3y + 7 = 0$ en algun punt d'abscissa

negativa?.

9. Donada la funció f(x) = $\ln|x|$, estudiau monotonia i curvatura. Féu la gràfica.

10. Demostrau que les funcions f(x) = x^2 i g(x) = 2^{-x} per $x \geq 0$ es tallen en un sol punt. Calculau el punt de tall amb un error d'una dècima.

11. Estudiau la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} & si\ x \neq 0 \\ 2 & si\ x = 0 \end{cases}$

12. Sigui $f : R \to R$ una funció amb derivada f ' (x) = sin (sin x) , sabent que f(0) = 0, pot ser f(1) = 2 ? .
Indicació : Empra el teorema del valor mitjà a [0, 1].

13. Donada la funció $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, es demana : a) Monotonia b) Asímptotes c) Gràfica.

14. Determina els punts de la paràbola y = x^2 que estan a mínima distància del punt A (0, 1).

15. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & si\ x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ Trobau a perquè sigui contínua en x = 2. Per aquest valor de a, és derivable la funció en x = 2 ?.

16. En quin punts la recta tangent a l'el·lipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.

17. Demostrau que les corbes $f(x) = \sin x \quad i \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$ es tallen en algun punt.

18. Sigui h(x) una funció derivable en tots els punts, de la que coneixem els següents valors : h(2)=3 i h'(2) = 1. Es considera la funció f(x) definida per $f(x) = \sqrt{[h(x)]^2 + x^2 + 3}$. Trobau l'equació de la recta tangent en x = 2.

19. Donada la funció $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, es demana : a) Monotonia b) Asímptotes c) Gràfica.

20. Demostra que la funció $f(x) = (1 - x^2) \cdot \sin x$ té un màxim relatiu a l'interval $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

21. Demostrau que l'equació sin x = 2x – 3 només té una solució real.

22. Calculau : $a) \lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} \qquad b) \lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{2^x - 8}{2^{x+1}} \right)$.

23. Calculau a i b perquè la funció $f(x)=\begin{cases} a+x\ln x & si \quad x>0 \\ b & si \quad x=0 \\ \frac{\sin(\pi x)}{x} & si \quad x<0 \end{cases}$ sigui contínua a tot R.

24. Es considera la funció real f(x)= $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$, on a, b, c són nombres reals.
   a. Trobau els valors de a i b perquè les rectes tangents a la gràfica de f(x) en els punts x = 2 i x = 4 siguin paral·leles a l'eix OX.
   b. Amb els valors de a i b trobats anteriorment, obtenir el valor de c perquè el punt d'inflexió de la gràfica de f(x) estigui sobre l'eix OX.

25. Integrau:

$a)\int (5x-3)\cdot\cos 4x \quad dx \qquad b)\int \frac{3x-1}{x^2+3x-4}dx \qquad c)\int \frac{x}{9+4x^4}dx \qquad d)\int \frac{e^{2x}}{1-e^{2x}}dx$

$e)\int_0^4 |3x-6|\,dx$

26. Calculau l'àrea de la regió del pla limitada per la corba y = $x^2 + 5x - 6$ i l'eix x.

27. Trobau l'àrea de la regió del pla limitada per la paràbola y = $6x - x^2$ i la recta y = x .

28. Calculau l'àrea limitada per $y^2 = 4x$, l'eix d'ordenades i la recta tangent a la paràbola paral·lela a la recta x-2y+8 = 0.

29. a) Trobau una funció f(x) de la que sabem $f''(x)=\frac{1}{x}$ i a més a més $f'(1)=0 \quad f(1)=-1$.
   b) Demostrau que la funció f(x) trobada a l'apartat anterior, talla a l'eix d'abscisses.

30. Trobau una funció polinòmica de tercer grau tal que tengui un extrem relatiu en (1, 1) i un punt d'inflexió en (0, 3). Féu una gràfica de dita funció.

31. Donada la funció $f(x)=\frac{1}{x}$ i g(x) = -x $+\frac{5}{2}$, es demana :

   a) Féu un dibuix del recinte del pla limitat per elles.
   b) Calculau l'àrea d'aquest recinte.

32. Donada la funció $f(x)=\ln\frac{2x+4}{x-2}$, es demana :
   a) Domini
   b) Asímptotes

c) Extrems relatius

d) Gràfica.

33. Demostrau que l'equació $x^5 + x^3 + 20x - 2 = 0$ només té una solució real.

34. Calculau a i b perquè la funció $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & si\ x < 2 \\ x^2 - b & si\ x \geq 2 \end{cases}$ verifiqui les hipòtesis del teorema de Lagrange a l'interval [0, 4]. Trobau també el punt que ho verifica.

35. Calculau els límits :

$$a)\ lim_{x \to 0}(sin 3x)^{4x} \qquad b)\ lim_{x \to 0}\frac{x - \mathrm{tg}\,x}{sin^3 5x}$$

36. De tots els triangles isòsceles de perímetre 60, troba les dimensions del d'àrea màxima.

37. Estudia la derivabilitat de la funció $f(x) = |x+1| + |x-1|$. Calcula la seva derivada.

38. La corba $y = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ talla al eix OX en x = 1 i té un punt d'inflexió en (3, 2). Calcula els punts de la corba que tenguin la recta tangent paral·lela al eix OX.

ÀLGEBRA

1. a) Trobau totes les matrius que verifiquen A X = X A, on $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. D'aquestes matrius, determinau les que tenen la suma de tots els elements igual a 0.

b) Calculau : $\begin{vmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 1 & 5 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 9 & 1\\ 3 & -1 & 2 & 7\end{vmatrix}$

2. Calculau la matriu $C = A + A B + A B^2 + A B^3 + \ldots + A B^{n-1}$ on $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

3. Trobau k perquè la matriu $A=\begin{pmatrix}k & 1 & 3\\ 0 & -1 & k\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$ admeti inversa. Trobau la matriu inversa per k = 1.

4. Trobau totes les matrius reals X tals que
$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot X$

5. Resoleu l'equació : $\begin{vmatrix}-x & 1 & 0 & 1\\ 1 & -x & 1 & 0\\ 0 & 1 & -x & 1\\ 1 & 0 & 1 & -x\end{vmatrix}=0$.

6. Donada la matriu A = $\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ a & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ A) Trobau els valors d' a per els quals 3A té inversa. B) Trobau la matriu inversa de A^2 per a = 0 si és posible.

7. Estudi i resolució del sistema $\left.\begin{aligned}x+3y+z&=3\\ 2x+my+z&=m\\ 3x+5y+mz&=5\end{aligned}\right\}$

8. Donada la matriu A = $\begin{pmatrix}2 & t & 0\\ t & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ per quins valors de t , $|A|$ és positiu. Troba també el major valor que pren el determinant.

9. Sigui A la matriu

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) Demostrau que $A+{}^tA$ és simètrica

b) Obté la matriu inversa de $A+{}^tA$

10. Per a quins valors de "m" el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+my+7z=0\\ 3x-5y+2z=0\\ x+3y-5z=0\end{array}\right\}$$

té infinites solucions.

11. Estudiau i resoleu el sistema segons els valors de "m" :

$$\left.\begin{array}{l} mx-y-z=-m\\ x-my+mz=m\\ x+y+z=-1\end{array}\right\}$$

33.Estudiau i resoleu el sistema :

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-4z=1\\ 2x-3y+3z=2\\ x+3y-9z=1\\ 4x+2y-10z=4\end{array}\right\}$$

13. Determinau si és possible trobar un valor de t, tal que $(A - tI)^2$ sigui la matriu nul·la, on $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ i I és la matriu identitat d'ordre 3.

14. Per quins valors d' x la matriu $A=\begin{pmatrix}\cos x & -sinx & 0\\ sinx & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ no té inversa . Calculau la matriu inversa quan sigui possible.

15. Donada la matriu $A=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$ Trobau a i b perquè A^2 = A.

16. Resoleu l'equació : $\begin{vmatrix}a & 1 & -7 & 2\\ 0 & a-1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & a+3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2a\end{vmatrix}=0$

17.Una matriu es diu idempotent si i sols si $A^2=A$

a) Provau que B= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ és idempotent.

b) Demostrau que si A és idempotent , B = I –A és idempotent i $A \cdot B = B \cdot A$

18. Resoleu l'equació matricial : A X – B + C = 0 , on

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

19. Suposem que c_1, c_2, c_3 , i c_4 són les quatre columnes d'una matriu quadrada A, i que el seu determinant val 3. Calcula raonadament :

a) El determinant de la matriu inversa de A.

b) El determinant de la matriu 2 A

c) El determinant d'una matriu on les seves columnes són

$2c_1 - c_3$, c_4, $5c_3$ i c_2

20. Estudiau el sistema i resoleu-ho quan sigui compatible determinat :

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = -1 \\ ax + 2y - z = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

21. a) Demostrau $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a \cdot (b-a) \cdot (c-b) \cdot (d-c)$

b) Trobau les matrius X que verifiquen A X = X A on A= $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

22. a) Si A és una matriu quadrada d'ordre 4 i $k \in \Re$, quina relació hi ha entre det (A) i det (k A) ?,

GEOMETRIA

1. Troba les equacions dels plans que són paral·lels al pla 2x-y+2z=3 i estan situats a 6 unitats de distància d'aquest pla.

2. Calculau el punt del pla 2x+y-3z = 0 més proper al punt A(0, -1, 3).

3. a) Trobau k perquè els plans Kx + 2y -3z +6 = 0 i 3x+ 6y - 9z - 3 = 0 siguin paral·lels

b) Trobau la distància entre ells.

4. Trobau els punts de la recta r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z$ que equidisten dels plans x-2y+3z-4=0 i 2x+y-3z+4=0.

5. a) Trobau l'equació del pla P que passa pels punts A(0, -1,2), B (1, 1, 2) i C(0, 0, -2).

b) Trobau l'equació de la recta r que passa per A (0,0,0) i es perpendicular al pla x-y+3=0

c) Calculau l'angle que formen el pla P i la recta r

6. Trobau k perquè les rectes $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{k}=\frac{z-1}{3}$ i $s:\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ es tallin en un punt. Trobau el punt de tall.

7.Calculau el simètric del punt A (1, -1, 1) respecte del pla 3x+y-z = 1

8. a) Trobau l'equació de la recta r que passa pel punt P (1, -1, 2) i és perpendicular al pla 2x – 3y –4z = 0

b) Trobau l'equació del pla Π que passa pel punt A (0 , 0,-1) i conté a la recta $s:\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$

6. a) Trobau l'equació del pla que passa pel punt A (1, -1, 3) i conté la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{-3}$.

b) Angle que formen el pla trobat en el apartat anterior i la recta $s:\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+z=0 \end{cases}$.

10. Calcula el punt de la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$ que es troba a la mínima distància del punt A (1, 0, -3).

11. Calculau la posició relativa del pla 2x + y + mz + n = 0 i de la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$ segons els valors de " m" i " n" .

12. a) Són coplanaris els punts A (1, 0,-1) , B (2, 0, -3) , C (5,-1, 3) i D (8, 2, -1).

b) Determinen les rectes r: x = y = -z i s: 2x = y = 3z un pla . En cas afirmatiu, troba la seva equació.

13. Trobau la perpendicular comú a les rectes

$$r: \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{i} \quad s: \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

14.a) Trobau l'equació del pla Π que passa per A (0, 0, -1) i conté a la recta r: x = y = z

12. Trobau l'equació de la recta que passa per B (0, -1, 2) i és perpendicular al pla Π.

15. Calculau els valors del paràmetre a, a∈R , per als quals els plans $a^2 x + (a-1) y + z = 0$ i $x + y - az = 0$ siguin perpendiculars.

16. Trobau l'equació de la recta que passa per l'origen de coordenades i talla a les rectes $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$ i $\begin{cases} x+3y=1 \\ x-y-z=6 \end{cases}$

17. Determinau "m" i "n" perquè els plans 6x-my+4z=9 i 9x-3y+nz-n=0 siguin paral·lels.

18. Trobau el simètric del punt P (1,2,4) respecte del pla x+y+z=1

19. Troba un vector unitari i perpendicular als vectors $v(1, 3, -5)$ i $u(3, 5, 0)$

20. Trobau l'equació de la recta que passa per A (1,2,3) i que talla a les rectes $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$ i $s: \begin{cases} x+y=3 \\ x-z=1 \end{cases}$.

21.A) Determinau a i b perquè els plans

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=3 \\ x-y+z=2 \\ 3x-y+az=b \end{array}\right\}$$ es tallin en una recta r.

b) Trobau l'equació del pla que conté a r i passa per P (2, 1, 3).

22. Escriu en forma paramètrica la recta perpendicular comuna a les rectes

$$r: x=y=z \qquad s: x-1=\frac{y}{3}=z$$

23. Són coplanaris els punts A (1, 0, 1) b (-2, 0 , 3) , C (-2, 6, 3) i D (0,0,2).

24. Calculau el punt del pla 2x+y-3z = 0 més proper al punt A(0, -1, 3).

PROBABILITAT

1. En una loteria els números estan enumerats del 0000 al 9999. Trobau la probabilitat que el primer premi sigui un número que només tengui tres xifres distintes, tals com 0094, 3283, 8550,...
2. Un dau està trucat, de manera que la probabilitat d'obtenir les diferents cares és directament proporcional als números d'aquestes. Es demana:
a) La probabilitat de cada una de les cares.
b) La probabilitat de treure un nombre parell.
3. Es tiren dos daus. Trobau la probabilitat de què les puntuacions obtingudes sumin 9.
4. Donats dos esdeveniments A i B, sabem que p(A) = 0,6, p(B)=0,7 i p(A∪ B) - p(A∩ B)= 0,3. Calculau p(A∪ B) i p(A∩ B).
5. Dos tiradors A i B tenen probabilitats 0,78 i 0,85 respectivament de donar al blanc. Trobau la probabilitat que alguns dels dos doni al blanc.
6. A un cert curs de 2n de batxillerat el 25% dels alumnes varen aprovar matemàtiques. D'aquests, el 70% varen aprovar Biologia. Per altre part, el 33% dels que no varen aprovar matemàtiques varen aprovar Biologia.
a) Quin percentatge va aprovar les dues assignatures a la vegada?.
b) Quin percentatge d'aprovats hi ha a Biologia.
c) Si un estudiant no aprova Biologia, quina probabilitat hi ha que hagi aprovat Matemàtiques.
7. Consideram dos esdeveniments A i B. Si se coneixen p(A)=0,84 , p(B)= 0,5 i p(Ac∪Bc)= 0,58. Aleshores, es demana si són independents A i B.
8. Una parella per celebrar el seu 25 aniversari planeja passar un

cap de setmana al país Basc. Trien a l'atzar tres poblacions B, SS i V. No obstant això es pronostica temps plujós el cap de setmana, en concret les probabilitats són de 3/5, 2/7 i 1/4 a B, SS i V respectivament.
a) Quina és la probabilitat que no plogui durant el cap de setmana?.
b) Quina és la probabilitat que la ciutat escollida sigui SS i no plogui el cap de setmana?.
c) La parella ha tengut un cap de setmana plujós. Quina és la probabilitat que hagi estat a la ciutat B?.
9. En un col·legi hi ha tres professors de matemàtiques A, B i C. Quan un alumnes es matricula al centre, té la mateixa probabilitat que li toqui un dels tres professors. Se sap que la probabilitat d'obtenir nota final un 10 amb el professor A és 0,1; amb el professor B, 0,2 i amb el professor C és 0,35.
a) Calculau la probabilitat que un alumne triat a l'atzar obtengui com a nota final un 10.
b) Sabent que un alumne ha tret un 10, quina és la probabilitat que hagi tengut el professor C?.
10. D'una població en què la probabilitat que els seus habitants tenguin tuberculosi és de 0,01, s'han triat a l'atzar una persona i s'ha observat per raig X que té tuberculosi. La probabilitat que un aparell de raig X detecti tuberculosi és 0,97 si en té realment i 0,001 si no en té. Què podem dir del diagnostic de la persona triada a l'atzar?.
11. Un armari té dos calaixos, al primer hi ha quatre monedes d'or i dues de plata, mentre que al segon hi ha tres monedes d'or i cinc de plata. Obrim un calaix a l'atzar i n'extreim una moneda. Calcula les següents probabilitats:
a) Que el calaix obert hagi estat el segon i hàgim agafat una moneda d'or.
b) Que el calaix obert hagi estat el primer sabent que se n'ha extret una moneda d'or.
12. Els pesos dels individus d'una població es distribueix normalment amb una mitjana igual a 70 kg i una desviació típica igual a 6 kg. D'una població de dues mil persones, quantes persones tendran un pes entre 64 kg i el 76 kg?.
13. D'un test aplicat a 400 persones s'ha obtingut una distribució normal de mitjana 60 i desviació típica 5. Si se suspèn al 67%, quina és la puntuació mínima per aconseguir aprovar ?.
14. El pes de les taronges segueix una distribució normal de mitjana 180g i desviació típica 20g. Si una persona ha comprat 10.000 kg. Calcula:
a) Quilos de taronges que s'espera que pesin manco de 150g
b) Quilos de taronges que s'espera que el seu pes estigui entre 160 i 200 kg.
15. En una població humana, una característica es distribueix mitjançat una distribució normal X. La probabilitat que X sigui menor o igual que 75 és 0,58 i que X sigui més gran o igual que 80 és 0,04. Trobau la mitjana i la desviació típica de X.