

TREBALL D'ESTIU

MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CCSS II

- 1) Una empresa que es dedica al muntatge en cadena ha determinat que el nombre de muntatges fets per una persona treballadora sense experiència depèn dels dies d'entrenament, d'acord amb la funció: $M(t) = \frac{30t}{t+4}$ on t és el temps en dies.
 - a) Quants muntatges farà el primer dia?
 - b) Quants muntatges farà el desè dia?
 - c) Què passaria amb el nombre de muntatges si mai no acabés l'entrenament.
- 2) De les funcions primitives de $f(x) = x^2 - x + 1$ quina d'elles agafa el valor 5 per $x = 3$
- 3) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la corba $y = 4x - x^2$ i l'eix OX.
- 4) Es desitja construir un dipòsit obert de base quadrada i amb un volum de 500 litres. Quines han de ser les dimensions del dipòsit perquè tingui la superfície mínima?
- 5) Calculeu a, b i c perquè la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tingui un màxim a (2,4) i un punt d'inflexió per a $x=1$
- 6) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la corba $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ i l'eix OX.
- 7) Trobau l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en el seu punt d'inflexió.
- 8) Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ estudieu la continuïtat i la derivabilitat de $f(x)$
- 9) Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + A & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + Bx + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ trobau A i B perquè la funció $f(x)$ sigui continua i derivable.
- 10) Donada la funció $f(x) = x^2 - 6x + 8$
 - a) En quin punt de la gràfica de $f(x)$ la recta tangent és paral·lela a l'eix X
 - b) Trobau l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt (2,0)
- 11) Calculeu l'àrea de la regió tancada per la corba $y = \ln x$ entre el punt de tall amb l'eix OX i el punt d'abscissa $x=e$.
- 12) La funció de cost total de producció de x unitats d'un determinat producte és $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Es defineix la funció de cost mitjà per unitat com $\overline{C(x)} = \frac{C(x)}{x}$. A quin nivell de producció serà mínim el cost mitjà per unitat?
- 13) Determineu dos nombres reals positius sabent que sumen 10 i que el producte dels seus quadrats és màxim
- 14) La recta $y = 2x + 6$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$
Trobau el valor de K i representau la funció.

- 15) Si retallam convenientment a cada cantonada d'una làmina de cartró de mides 80cmx50cm un quadrat de costat x , i la doblegam de manera convenient, construïm una capsa. Calculau x perquè el volum d'aquesta capsa sigui màxim.
- 16) Una determinada classe de bengala està encesa un temps de 4 minuts. Hem comprovat que el percentatge de lluminositat que produeix és donat, considerant el temps en minuts, a través de la funció $f(t) = 25t(4-t)$ on $0 \leq t \leq 4$
- Per a quin valor de t obtenim el percentatge de lluminositat màxim?
 - Per a quins valors de t el percentatge de lluminositat és del 75%?
- 17) La funció $f(x) = x^3 + px^2 + q$ té un mínim relatiu de valor 3 quan $x=2$. Trobau els valors de p i q . Representau gràficament la funció $f(x)$.
- 18) Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = x^2 - 5x + 6$ i la recta $y = 2x$
- 19) Trobau dos nombres naturals que sumin 36 i que el producte del primer sumand pel quadrat del segon sigui màxim.
- 20) Donada la funció $f(x) = x \ln \frac{x}{a}$, amb $a > 0$. Donau el valor de a perquè $f(x)$ tingui un mínim relatiu en $x=1$.
- 21) Trobau a, b, c i d de la funció polinòmica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabem que la seva recta tangent en el punt $(1,1)$ és $y = -x + 2$ i que té un extrem en el punt $(0,2)$.
- 22) El propietari d'un edifici d'apartaments té llogats els quaranta apartaments del mateix a 200 € al mes cadascun. Per cada 10 € d'augment en el preu de lloguer perd un llogater, que es trasllada a un altre pis més econòmic. Quin és el lloguer que més beneficis produeix al propietari?.
- 23) Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
- Calculau a i b sabent que f és continua i té un mínim en $x = -1$
 - Per $a = -1$, $b = 1$, estudiau la derivabilitat de f en $x = -1$ i en $x = 1$.
- 24) Donada la funció $f(x) = 2ax + b + \frac{36}{x}$, calculau a i b de manera que la gràfica de f passi pel punt $(3,10)$ i tingui tangent horitzontal en aquest punt.
- 25) Determinau els intervals de creixement, decreixement, màxims i mínims de la funció $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- 26) Disposem d'un filferro de 2m de longitud. Se divideix en dues parts, cada una de les quals és la base d'un triangle isòsceles tal que la seva alçada és el doble que la base. Quant ha de mesurar cada part per tal que la suma de les àrees dels triangles construïts sigui mínima?
- 27) Dels rectangles de 10 cm de perímetre, calculau les dimensions del qui té la diagonal mínima.
- 28) Dels triangles rectangles de 10 cm d'hipotenusa, calculau les dimensions del qui té el quadrat de l'àrea màxima.

- 1) a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ trobau A^2 , A^3 i deduiu A^n .
- b) Si $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calculau $[(2A)^t - B^{-1}]^t$
- 2) Una senyora té 3 filles A,B,C; i cada una d'elles té un cert nombre de fills. Si la filla A tingués el doble de fills, aleshores els seu més els de la filla B sumarien el mateix n° de fills que la filla C més 3. D'altre banda, els fills de A i els fills de B donen el mateix n° que els de C. Si al n° total de néts hi treim el doble dels fills d'A i li afegiu els fills de B, llavors donarà un total de 6. Trobau el n° de fills de cada filla.
- 3) Una fàbrica de paper té emmagatzemats 4000 Kg de pasta de paper normal A i 3000 Kg de pasta de paper reciclat B. La fàbrica produeix 2 tipus diferents de caixes de cartó. La caixa del tipus 1 està fabricada amb 0'2 Kg de A i 0'1 Kg de B, mentre que la caixa del tipus 2 està fabricada amb 0'2 Kg de A i 0'3 Kg de B. El preu de la caixa del tipus 1 és de 50 €/unitat i el del tipus 2 és de 60 €/unitat. Quantes caixes de cada classe s'han de fabricar per a maximitzar el benefici?
- 4) a) La matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$ té inversa?. B) Calculau la inversa de
- $$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
- 5) Un ferrer amb 80 Kg d'acer i 120 Kg d'alumini vol fer bicicletes de passeig i de muntanya que vol vendre, respectivament, a 300 i 250 euros per treure el màxim benefici. Per a la de passeig empra 1 Kg d'acer i 3 d'alumini, i per a la de muntanya 2 Kg dels dos metalls. Quantes bicicletes de passeig i de muntanya vendrà?
- 6) Maximitzau i minimitzau la funció $z=x+y$, amb les restriccions: $12x+5y \leq 120$; $3x+4y \leq 90$; $x+2y \leq 20$; $x+y \geq 10$; $y \geq 0$; $x \geq 0$
- 7) Calculau una matriu X que verifiqui la igualtat $AX=B$ amb:
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
- Verifica també la matriu X la igualtat $X \cdot A=B$?
- 8) Trobau la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 9) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Comprovau $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 10) Les edats d'un nin, un jove i un vell compleixen les següents relacions: l'edat del vell és el triple de la del nin, més el doble de la del jove. L'edat del jove és la cinquena part de la del vell, més la del nin; i l'edat del vell menys la del jove i menys quatre vegades la del nin val 15. Calculau les tres edats.
- 11) Una dieta alimentària ha de tenir al menys 400 unitats de vitamines, 500 unitats de minerals i 1400 calories. L'aliment A conté, per Kg, 200 unitats de vitamines, 100 unitats de minerals i 400 calories. L'aliment B, també per Kg i respectivament 100,200 i 400. Cada Kg de l'aliment A costa 5 € i cada Kg de B 3 €. Quina ha d'esser la composició de la dieta perquè el cost diari sigui el més petit possible

- 12) Una factoria d'automòbils i camions té dues naus: una de muntatge i una d'acabats. En la de muntatge, per a cada automòbil necessitem 2 dies/obrer i per a cada camió fan falta 7 dies/obrer. En la d'acabat fan falta 3 dies/obrer tant per finalitzar l'automòbil com el camió. En la nau de muntatge disposem de 300 dies/obrer i en la d'acabats disposem de 270 dies/obrer. Si el preu de cada automòbil és de 12000€ i el de cada camió és de 36000 €. Quantes unitats necessit produir per a maximitzar els guanys?
- 13) Si l'alçada d'en Carles augmentés el triple de la diferència de les alçades d'en Toni i d'en Joan, en Carles seria igual d'alt que en Joan. Les alçades dels tres sumen 515 cm. Vuit vegades l'alçada d'en Toni és el mateix que nou la d'en Carles. Trobau les tres alçades.
- 14) Discutiu, interpretau geomètricament i re soleu per Gauss el sistema:
- $$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 5 \\ x + y + z = 2 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$
- 15) En una papereria venen quaderns petits, mitjans i grossos. Un de petit més 2 de mitjans, més 3 de grossos valen 9,75 €. Dos de petits més 3 de mitjans, més 1 de gros valen 8 €.
- Amb aquestes dades, es pot saber què val un quadern petit? Per què?
 - Si a més se sap que un quadern mitjà val el doble que un de petit, calculau què val un quadern petit, què val un de mitjà i què val un de gros.
- 16) Tres persones van a una peixateria. La 1ª compra 1 Kg de molls i 2 Kg de calamars; la 2ª compra 2 Kg de molls, 1 Kg de calamars i 1 Kg de sardines; i la 3ª compra 1 Kg de molls i 3 Kg de calamars.
- Donau una matriu 3x3 que expressi el nombre de Kg de molls, de calamars i de sardines que ha comprat cada una de les tres persones.
 - Si en aquesta compra la 1ª ha gastat un total de 59 €, la 2ª 47 € i la 3ª 84 €. Què val 1 Kg de molls, 1 Kg de calamars i 1 Kg de sardines?

- 17) Discutiu i resoleu pel cas compatible els sistemes següents:

$$\left. \begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} mx + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ x - y + 12z = 0 \end{array} \right\}$$

- 18) Una companyia aèria té dos avions A i B per fer un determinat trajecte. L'avió A ha de fer igual o més vegades el trajecte que l'avió B, però no pot passar de 120 viatges. Entre els dos avions han de fer com a mínim 60 vols, però com a màxim 200. En cada vol, A consumeix 900 litres de combustible i B 700 litres. En cada viatge de l'avió A l'empresa guanya 30.000 euros i 20.000 euros per cada viatge del B.
- Quants viatges ha de fer cada avió per obtenir un màxim de benefici?.
 - Quants viatges ha de fer cada avió perquè el consum sigui mínim?.

- 1) A un cert curs de 2n de batxillerat d'un col·legi el 72,5% dels alumnes varen aprovar Matemàtiques. D'aquests, el 70 % varen aprovar també Biologia . Per altre part, el 33% dels que no varen aprovar Matemàtiques, varen aprovar Biologia
 - a) Expressau les dades proporcionades com a probabilitats i donau un arbre que representi les dades.
 - b) Quin percentatge va aconseguir aprovar les dues assignatures a la vegada?
 - c) Quin percentatge d'aprovat hi ha a l'assignatura de Biologia?
 - d) Si un estudiant no aprova Biologia, quina probabilitat hi ha, que hagi aprovat les Matemàtiques?.
- 2) Considerant dos esdeveniments, A i B. Si se coneixen les probabilitats $p(A) = 0,84$; $p(B) = 0,5$; $p(Ac \cup Bc) = 0,58$ (on Ac és l'esdeveniment complementari d'A). Aleshores:
 - a) Són independents els esdeveniments A i B?
 - b) Calculau la probabilitat de que es compleixin B i Ac
- 3) Una parella per celebrar el seu 25 aniversari planeja passar un cap de setmana gastronòmic triant a l'atzar una de les tres ciutats del País Basc: B, SS, V. No obstant això es pronostica temps plujós durant aquests dies. En concret, les probabilitats de pluja durant el cap de setmana considerat són de $3/5$, $2/7$ i $1/4$ a B, SS i V, respectivament.
 - (a) Proporcioneu el diagrama en arbre associat al problema
 - (b) Quina és la probabilitat que no plougui durant el cap de setmana?
 - (c) Quina és la probabilitat que la ciutat escollida sigui SS i no plougui durant la visita?
 - (d) La parella ha tingut un cap de setmana plujós. Quina és la probabilitat que hagi estat a la ciutat B?.
- 4) Una família que fa un viatge en cotxe des de Cartagena per la Comunitat Valenciana té un 50% de possibilitats de visitar la ciutat de València, un 40% de visitar Peníscola i un 30% de visitar ambdues ciutats. Es demana:
 - a) La probabilitat que visiti almenys una de les dues ciutats.
 - b) La probabilitat que visiti València però no visiti Peníscola
 - c) La probabilitat que visiti únicament una de les dues ciutats.
 - d) La probabilitat que visiti Peníscola, sabent que ha visitat València.
- 5) Donats dos successos, se sap que $p(A) = 0,6$ $p(B) = 0,3$ $p(A \cap B) = 0,2$.
 - a) Calculau $p(A \cup B)$, $p(A \cap B / A \cup B)$ i $p(A / A \cup B)$
 - b) Calculau $p(A/B)$ i $p(A / A \cap B)$
- 6) En una classe infantil hi ha 6 nines i 10 nins. Si s'escull 3 alumnes a l'atzar, calculau la probabilitat:
 - a) Seleccionar 3 nins b) Seleccionar 1 nin i 2 nines c) Seleccionar 2 nins i 1 nina.
 - c) Seleccionar, almenys 1 nin
- 7) Donats dos successos, se sap que $p(A) = 0,3$ $p(B) = 0,7$ $p(A \cap B) = 0,1$. Calculau $p(A')$, $p(A' \cap B')$ $p(A' \cup B')$ $p(A \cap B')$ i $p(A / A \cap B)$
- 8) Un estoig conté 15 bolígrafs de color vermell i 10 de color blau. Es demana:
 - a) Si en triam un a l'atzar , quina és la probabilitat que sigui de color vermell? I de color blau?
 - b) Si n'extraïem dos, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que ambdós siguin blaus
 - c) Si n'extraïem dos, sense reemplaçament, calcular la probabilitat que el primer sigui blau i el segon vermell.
- 9) En un col·legi hi ha 3 professors de matemàtiques A, B i C. Quan un alumne es matricula en el centre, té igual probabilitat de que li toqui un dels 3 professors. Se sap que la probabilitat d'obtenir com a nota final un excel·lent amb el professor A és $0'3$, amb el professor B és $0'28$ i la d'obtenir-lo amb el professor C és $0'35$.

- a. Calculeu la probabilitat que un alumne, triat a l'atzar, obtingui com a nota final un excel·lent.
 - b. Sabent que un alumne ha obtingut un excel·lent com a nota final, quina és la probabilitat que hagi tingut el professor C?
- 10) S'han triat a l'atzar 36 cotxes d'un taller, i s'ha comprovat que cada un d'ells va estar una mitjana de 8,5 hores en reparació i una desviació típica de 1,5 hores.
- a) Determineu l'interval de confiança, al nivell del 98 % per a la mitjana del temps que estan els cotxes en aquest taller
 - b) Determineu la grandària mínima que ha de tenir una mostra que ens permeti estimar la mitjana del temps que estan en reparació els cotxes en aquest taller amb un error en l'estimació no superior a 0,5 hora i amb un nivell de confiança del 94 %
- 11) a) D'una mostra aleatòria de 2100 persones d'una població n'hi ha 630 que llegeixen un determinat diari. Calculeu l'interval de confiança per a la proporció poblacional per a un nivell de confiança del 98%.
- b) Calculeu el valor mínim de persones de la mostra per tal que l'error en l'estimació sigui més petit que un 5% amb un nivell de confiança del 93%
- 12) En una determinada fàbrica d'automòbils, el 10% dels cotxes tenen defectes en el motor, el 8% tenen defectes en la carrosseria i el 4% tenen defectes en ambdós. Es demana:
- a) Quina és la probabilitat que un cotxe tingui almenys un defecte?
 - b) Quina és la probabilitat que un cotxe tingui un defecte al motor, però no a la carrosseria?
 - c) Quina és la probabilitat que un cotxe tingui un defecte a la carrosseria, sabent que el motor no és defectuós?